Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο $f(x)$, με
$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$, $n \geq 1$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$,
τέτοιο ώστε οι τιμές $f(m)$ να είναι πρώτοι αριθμοί, $\forall m \in \mathbb{N}$

// Υποθέτω ότι υπάρχει ένα τέτοιο πολυώνυμο.
Για κάποια τιμή του m, έστω m_0, έχω $f(m_0) = p$,
με p πρώτο αριθμό.
Για κάθε ακέραιο t, θεωρώ την:

$$f(m_0 + tp) = \alpha_n (m_0 + tp)^n + \dots + \alpha_1 (m_0 + tp) + \alpha_0$$
$$= (\alpha_n m_0^n + \quad \dots \quad + \alpha_1 m_0 + \alpha_0) + p\,F(t)$$

, όπου $F(t)$ πολυώνυμο του t με ακέραιους συντελεστές.

Επομένως, $f(m_0 + tp) = f(m_0) + pF(t) = p\,(1 + F(t))$

Επειδή $p \mid f(m_0 + tp)$ και οι τιμές του $f(x)$ είναι πρώτοι,
έπεται ότι $f(m_0 + tp) = p$, για κάθε ακέραιο αριθμό t,
(αριθμήσιμο πλήθος)
γεγονός άτοπο, διότι κάθε πολυώνυμο βαθμού n παίρνει
μια συγκεκριμένη τιμή το πολύ n φορές (πεπερασμένο πλήθος φορών)
με βάση το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. $\square$

Να δειχθεί ότι υπάρχουν διαστήματα φυσικών αριθμών οσοδήποτε μεγάλα τα οποία δεν περιέχουν πρώτο αριθμό.

// Έστω $n \in \mathbb{N}$. Κανένας εκ των διαδοχικών φυσικών αριθμών $(n+1)!+2,\ (n+1)!+3,\ \ldots,\ (n+1)!+(n+1)$ δεν είναι πρώτος, διότι ο $(n+1)!+m$, διαιρείται με m $\forall\ m = 2, 3, \ldots, (n+1)$.